第 4 节 高考中椭圆常用的二级结论（★★★）

强化训练

1．（2023•北京丰台模拟•★）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左、右两个顶点分别为$A$，$B$，点$P$是椭圆$C$上异于$A$，$B$的任意一点，则直线$PA$，$PB$的斜率之积为_____.

答案：$-\dfrac{3}{4}$

解析：涉及椭圆上的点与左、右顶点的连线斜率，直接用内容提要 3 的第三定义斜率积结论计算，

由题意，$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$.

2．（2023•甘肃武威模拟•★★）若椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$的焦点为$F_1$，$F_2$，点$P$在椭圆上，且$\angle F_1PF_2=90^{\circ}$，则$\Delta PF_1F_2$的面积为（　　）

（A）9　（B）12　（C）15　（D）18

答案：A

解析：给出$\angle F_1PF_2$，直接用$S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$求面积，

由题意，$\theta=90^{\circ}$，所以$S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}=9\tan 45^{\circ}=9$.

3．（★★）椭圆$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$在椭圆上，则$|PF_1|\cdot|PF_2|$的取值范围为_____.

答案：$[2,6]$

解析：涉及焦半径$|PF_1|$和$|PF_2|$，可用焦半径公式来算，

由题意，$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，椭圆的离心率$e=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

设$P(x_0,y_0)(-\sqrt{6}\le x_0\le\sqrt{6})$，则$|PF_1|=\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}x_0$，$|PF_2|=\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}x_0$，所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=6-\dfrac{2}{3}x_0^2\in[2,6]$.

4．（★★★）设F_1，F_2是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$的左、右焦点，$P$是椭圆在第一象限上的一点，且$\angle F_1PF_2=60^{\circ}$，则点$P$的坐标为_____.

答案：$(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3})$

解析：给出$\angle F_1PF_2$，可由焦点三角形面积公式$S=c|y_P|=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$来建立方程求点$P$的纵坐标，

由题意，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$，设$P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，

则$S_{\Delta F_1PF_2}=c|y_0|=cy_0=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}$，所以$\sqrt{2}y_0=2\tan 30^{\circ}$，解得：$y_0=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

又点 P 在椭圆上，所以 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，从而 $x_0=\sqrt{4-2y_0^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，故点 P 的坐标为 $(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})$.

5.（2022·全国模拟·★★★）已知 P 是椭圆 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 在第一象限上的动点，F_1，F_2 分别是其左、右焦点，O 是坐标原点，则 $\frac{|OP|}{|PF_1|-|PF_2|}$ 的取值范围是_____.

答案：$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

解析：要求目标的范围，先设变量表示它. 由于有 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$，故考虑设 P 的坐标，用焦半径公式算它们，

由题意，$a=2\sqrt{2}$，$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，设 $P(x_0,y_0)(0<x_0<2\sqrt{2})$，

则由焦半径公式，$|PF_1|=2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}x_0$，$|PF_2|=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x_0$，

又 $|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，所以 $\frac{|OP|}{|PF_1|-|PF_2|}=\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\sqrt{2}x_0}=\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2x_0^2}}$ ①，

有两个变量，可利用椭圆方程消元，y_0^2 只出现一次，故消 y_0^2，

因为 P 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{4}=1$，故 $y_0^2=4-\frac{x_0^2}{2}$，

代入①得 $\frac{|OP|}{|PF_1|-|PF_2|}=\sqrt{\frac{x_0^2+4-\frac{x_0^2}{2}}{2x_0^2}}=\sqrt{\frac{8+x_0^2}{4x_0^2}}=\sqrt{\frac{1}{4}(1+\frac{8}{x_0^2})}$，

因为 $0<x_0<2\sqrt{2}$，所以 $0<x_0^2<8$，从而 $\frac{1}{4}(1+\frac{8}{x_0^2})>\frac{1}{2}$，

故 $\sqrt{\frac{1}{4}(1+\frac{8}{x_0^2})}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\frac{|OP|}{|PF_1|-|PF_2|}$ 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$.

6.（2022·广西模拟·★★）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 作倾斜角为 45° 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点，若点 $M(-3,2)$ 是线段 AB 的中点，则椭圆 C 的离心率是（　　）

（A）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{2}{5}$　（D）$\frac{\sqrt{5}}{5}$

答案：A

解析：涉及弦 AB 的中点，考虑中点弦斜率积结论，先计算直线 OM 和直线 AB 的斜率，

由题意，$k_{OM}=\frac{2-0}{-3-0}=-\frac{2}{3}$，$k_{AB}=\tan 45^\circ=1$，所以 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{2}{3}$，

由中点弦斜率积结论，$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$，所以 $-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{2}{3}$，故 $2a^2=3b^2=3(a^2-c^2)$，整理得：$\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，

所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.（2023 • 黑龙江哈尔滨模拟 • ★★）阿基米德是古希腊著名的数学家、物理学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率 π 等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，过 F 作直线 l 交椭圆于 A，B 两点，若弦 AB 的中点为 $M(2,-1)$，则椭圆的面积为（　　）

（A）$36\sqrt{2}\pi$　　（B）$18\sqrt{2}\pi$　　（C）$9\sqrt{2}\pi$　　（D）$6\sqrt{2}\pi$

答案：C

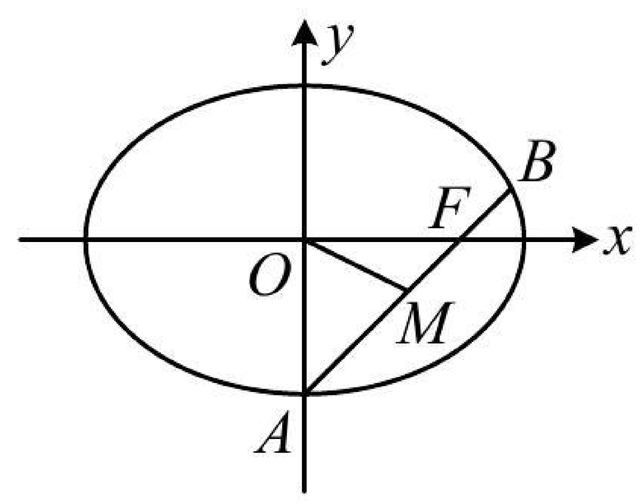
解析：分析可发现关键是求 a 和 b，条件中有弦中点，故用中点弦结论可建立一个方程，

如图，由中点弦斜率积结论，$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$，又 $k_{AB}=k_{FM}=\frac{-1-0}{2-3}=1$，$k_{OM}=\frac{-1-0}{2-0}=-\frac{1}{2}$，

所以 $1\times(-\frac{1}{2})=-\frac{b^2}{a^2}$，故 $a^2=2b^2$ ①，

还差 1 个方程，可由右焦点坐标来建立，因为右焦点为 $F(3,0)$，所以 $a^2-b^2=3^2=9$ ②，

联立①②解得：$a=3\sqrt{2}$，$b=3$，由题意，$\frac{S}{\pi}=ab$，故椭圆的面积 $S=\pi ab=9\sqrt{2}\pi$.



8.（2023 •重庆模拟 •★★★）已知点 $A(-5,0)$，$B(5,0)$，动点 $P(m,n)$ 满足直线 PA，PB 的斜率之积为 $-\frac{16}{25}$，则 $4m^2+n^2$ 的取值范围是（　　）

（A）$[16,100]$　　（B）$[25,100]$　　（C）$[16,100)$　　（D）$(25,100)$

答案：C

解析：看到 PA，PB 的斜率积为 $-\frac{16}{25}$，想到基于椭圆第三定义的斜率积结论，

由题意，点 P 在以 A，B 为左、右顶点的椭圆上，所以 $a=5$，又 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{16}{25}$，所以 $b^2=16$，

故点 $P(m,n)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上且不与 A，B 重合，所以 $\frac{m^2}{25}+\frac{n^2}{16}=1(m\neq\pm5)$，

可由此式反解出 n^2，代入 $4m^2+n^2$ 消去 n，故 $n^2=16-\frac{16}{25}m^2$，

所以 $4m^2+n^2=4m^2+16-\frac{16}{25}m^2=\frac{84}{25}m^2+16$ ①，

因为 $m\neq\pm5$，所以 $-5<m<5$，故 $0\le m^2<25$，结合①可得 $16\le 4m^2+n^2<100$.